


**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования**

**«Кемеровский государственный университет»**

**«УТВЕРЖДАЮ»**

**Директор института  
фундаментальных наук**

  
**Е.Г. Газенаур**

**«18» декабря 2023 г.**

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ**

**в магистратуру по направлению подготовки**

**01.04.01 Математика**

**Профиль (направленность) подготовки**

**Преподавание математики и информатики**

**КЕМЕРОВО 2023**

Целью вступительных испытаний по Математике является определение теоретической и практической подготовленности поступающего к выполнению профессиональных задач, установленных Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС), то есть комплексная оценка компетенций в области Математики и их реализации в конкретной магистерской программе.

Форма проведения вступительных испытаний: *тест*.

Результаты оцениваются по 100-балльной шкале.

В испытаниях варианты тестовых заданий по 12 вопросов (заданий) в каждом варианте.

Нижний порог прохождения – 30 баллов.

В программе представлены:

- образцы тестов и их оценка;
- содержание блоков тем, на основе которых составлены тесты;
- основная и дополнительная литература.

Апелляции по вступительным испытаниям принимаются на следующий день после опубликования результатов.

Общая продолжительность вступительного испытания – 180 минут.

## Образцы тестов и их оценка

**Вопрос 1.** Ядро и образ линейного отображения векторных пространств.

**Вопрос 2.** Какое отображение называется линейным?

**Вопрос 3.** Свойства гиперболы.

**Вопрос 4.** Понятие евклидова пространства.

**Вопрос 5.** Понятие ортонормированного базиса.

**Вопрос 6.** Формула Грина.

**Вопрос 7.** Как находится радиус сходимости степенного ряда?

**Вопрос 8.** Что такое комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа?

**Вопрос 9.** Найти производную функции  $f(x) = \frac{\sin(2^x)}{\cos(x^2)}$ .

**Вопрос 10.** Найти интеграл  $\int \ln x dx$ .

**Вопрос 11.** Предприятие выпускает емкости объёмом 100 л. в форме прямоугольного параллелепипеда. При этом, для соединения боковых граней используются дорогостоящие угловые соединения трех видов: для одной пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений первого типа равна 125\$, для другой пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений второго типа равна 75\$, а для боковых ребер стоимость 1 м угловых соединений третьего типа равна 200\$. Найти при каких размерах емкости расходы по закупке уголков будут минимальными.

**Вопрос 12.** После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 20. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени  $T$  рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента  $T$ ?

### *Варианты оценивания ответов*

**Вопрос 4.** Понятие евклидова пространства.

Правильный ответ – 5 баллов, неправильный ответ – 0 баллов.

*Правильный ответ:* Векторное пространство  $V$  называется евклидовым, если на нем задано скалярное произведение, т.е. билинейная симметричная положительно определенная функция двух векторных аргументов.

**Вопрос 5.** Понятие ортонормированного базиса.

Правильный ответ – 5 баллов, неправильный ответ – 0 баллов.

*Правильный ответ:* Базис в евклидовом пространстве называется ортонормированным, если все его векторы взаимно ортогональны и имеют длину, равную единице.

**Вопрос 11.** Предприятие выпускает емкости объемом 100 л. в форме прямоугольного параллелепипеда. При этом, для соединения боковых граней используются дорогостоящие угловые соединения трех видов: для одной пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений первого типа равна 125\$, для другой пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений второго типа равна 75\$, а для боковых ребер стоимость 1 м угловых соединений третьего типа равна 200\$. Найти при каких размерах емкости расходы по закупке уголков будут минимальными.

*Этапы оценивания решения.*

**5 баллов.** Введены искомые переменные  $x, y, z$  – длины боковых ребер. При этом отмечено, что  $x$  – это длина ребра основания 1-го типа и таких ребер 2,  $y$  – это длина ребра основания 2-го типа и таких ребер 2,  $z$  – это длина вертикального бокового ребра и таких ребер 4. Составлена функция стоимости всех ребер.

**10 баллов.** Составлена функция стоимости всех ребер. Выписано условие  $x y z = 100$ . Сформулирована задача отыскания условного минимума. Записана функция Лагранжа.

**15 баллов.** Найдены необходимые условия локального условного экстремума и найдены точки, в которых возможен локальный экстремум.

**20 баллов.** Сформулированы достаточные условия локального условного экстремума и найдены точки, в которых возможен локальный экстремум. Приведено решение задачи с незначительными ошибками или недочетами;

**25 баллов** – полное правильное решение задачи.

**Вопрос 12.** После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени  $T$  рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента  $T$ ?

*Этапы оценивания решения.*

**5 баллов.** Введены необходимые переменные:  $k$  – число проголосовавших зрителей,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  – выставленные ими оценки. Составлена формула для вычисления рейтинга  $T$ .

**10 баллов.** Составлена формула для вычисления рейтинга  $T$ . Доказано, из какого максимального значения рейтинга (указанного в задаче целого значения  $T$ ) должны исходить для получения наибольшее количество зрителей. Указано, при каких значениях  $n_1, n_2, \dots, n_k$  это достигается.

**15 баллов.** Представлено решение в частном случае, когда максимальное значение рейтинга 10 при одном проголосовавшем.

**20 баллов.** Дополнительно доказано, что наибольшее количество зрителей может быть получено только в том случае, когда мы исходим из максимального значения рейтинга 10 при одном проголосовавшем.

**25 баллов** – полное правильное решение задачи.

## Содержание блоков тем, на основе которых составлены тесты

### I. Алгебра и геометрия

#### Алгебра

Понятие группы, кольца и поля. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу. Кратность корня многочлена, ее связь со значениями производных. Разложение многочлена на неприводимые множители над полями комплексных и действительных чисел. Формулы Виета; наибольший общий делитель многочленов, его нахождение с помощью алгоритма Евклида. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены.

Группа подстановок, четность подстановки. Циклические группы. Разложение группы на смежные классы по подгруппе.

Векторные пространства, базис и размерность. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямые суммы.

Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к нормальному виду. Закон инерции. Положительно определенные квадратичные формы.

Линейные отображения векторных пространств, их задание матрицами. Ядро и образ линейного отображения. Матрицы оператора в различных базисах. Собственные векторы и собственные значения. Достаточные условия приводимости матрицы линейного у оператора к диагональному виду. Понятие о жордановой нормальной форме.

Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации. Ортогональные и унитарные матрицы. Линейный оператор, сопряженный к данному. Симметрические и эрмитовы линейные операторы, их спектр. Соответствие между билинейными формами и линейными операторами. Приведение квадратичной формы к главным осям.

#### Геометрия

Прямые линии и линии второго порядка на плоскости. Квадратичные функции на плоскости и их матрицы. Ортогональные инварианты квадратичных функций. Приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду. Свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Плоскости и поверхности второго порядка в пространстве. Теорема о канонических уравнениях поверхностей второго порядка (без доказательства). Эллипсоиды; гиперболоиды; параболоиды. Цилиндры.

Кривизна плоской кривой. Эволюта и эвольвента. Пространственные кривые, репер Френе, кривизна и кручение пространственных кривых. Формулы Френе, натуральное уравнение кривой.

Поверхности в  $\mathbf{R}^3$ , способы задания поверхностей. Координаты на поверхности, касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная форма

поверхности, площадь поверхности. Вторая квадратичная форма и ее свойства. Средняя и гауссова кривизны поверхности.

## 2. Математический анализ

Действительные числа. Полнота множества  $\mathbf{R}$ . Существование точной верхней (нижней) грани числового множества, принцип вложенных отрезков.

Предел числовой последовательности, основные свойства сходящихся последовательностей и признаки существования предела. Предельные точки множества и теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности. Предел монотонной последовательности. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы. Критерий Коши существования предела.

Предел функции в точке, основные свойства. Непрерывные функции. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность композиции. Свойства непрерывных функций на отрезке (теоремы Вейерштрасса, Кантора, о промежуточном значении).

Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Раскрытие неопределенностей. Локальная формула Тейлора. Разложения элементарных функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций: признаки постоянства, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, асимптоты.

Определенный интеграл Римана. Суммы Римана и Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции и ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Существование первообразной от непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница, Замена переменной, интегрирование по частям. Длина дуги и другие геометрические, механические и физические приложения.

Функции многих переменных. Евклидово пространство  $n$  измерений. Основные метрические и топологические характеристики множеств евклидова пространства, открытые и замкнутые множества и их свойства. Предел, непрерывность функции многих переменных. Свойства непрерывных функций. Дифференцируемость функции, дифференциал и частные производные функции многих переменных. Производная по направлению, градиент. Дифференцирование сложных функций. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Локальные экстремумы, необходимые условия, достаточные условия локального экстремума.

Отображения  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ , их дифференцирование, матрица производной.

Числовые ряды. Сходимость и сумма числового ряда, критерий Коши. Знакопостоянные ряды, теоремы сравнения. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак сходимости. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Понятие о бесконечных произведениях.

Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости. Свойства предельной функции функциональной последовательности и суммы функционального ряда. Степенные ряды, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Свойства суммы степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряды с комплексными членами, формулы Эйлера.

Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций, признаки сходимости.

Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Эйлеровы интегралы и их свойства.

Ряды Фурье. Ортогональные системы функций, тригонометрическая система. Ряд Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке. Принцип локализации. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье. Равенство Парсеваля.

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Остроградского. Формула Стокса.

### **3. Теория функций комплексного переменного**

Комплексные числа, модуль и аргумент. Сфера Римана. Евклидова и сферическая метрика. Топология на  $\mathbf{C}$ , области, пути и кривые на  $\mathbf{C}$ .

Предел функции, непрерывность в  $\mathbf{C}$  и в расширенной комплексной плоскости.  $\mathbf{C}$ -дифференцируемость, аналитичность функции. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций. Критерий аналитичности для класса непрерывно дифференцируемых функций. Конформные и локально-конформные отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента для производной от аналитической функции. Гидродинамическая и геометрическая интерпретация для аналитической функции. Комплексный потенциал векторных полей на плоскости.

Степенные ряды, аналитичность суммы степенного ряда, почленное



дифференцирование степенных рядов. Гармонические функции. Свойства гармонических функций. Степенная функция, экспоненциальная функция и им обратные. Функция Жуковского. Многочленные аналитические функции. Дробно-линейные отображения, Основные свойства. Круговое свойство. Симметрия. Инверсии. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы.

#### 4. Функциональный анализ

Определение линейного нормированного пространства, примеры норм. Банаховы пространства. Линейные операторы, норма оператора. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов.

Гильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Общий вид линейного функционала. Самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы. Ортогональные системы. Неравенство Бесселя. Базисы в гильбертовом пространстве.

Линейные топологические пространства и обобщенные функции. Полиномированные пространства. Пространства Фреше. Функционал Минковского. Нормируемость и метризуемость.

Основные примеры функциональных пространств:  $L^1$ ,  $L^p$  ( $p > 1$ ),  $C^0$ ,  $C^k$ ,  $C^\infty$ .

#### 5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы первого порядка. Понятие решения. Уравнения и системы порядка выше первого и их сведение к системам первого порядка. Автономные и неавтономные уравнения. Динамические системы. Геометрические понятия, связанные с дифференциальными уравнениями. Фазовое пространство и расширенное фазовое пространство. Поле направлений, интегральные кривые. Векторное поле, фазовые кривые (траектории). Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения. Приемы интегрирования некоторых специальных классов обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующие множители. Уравнения Бернулли и Риккати.

Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство решений. Фундаментальная система решений. Характеристическое уравнение. Общее решение. Линейное однородное уравнение  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами: пространство решений, характеристическое уравнение, общее решение. Линейные неоднородные системы уравнений с постоянными коэффициентами: общие свойства, метод вариации постоянных, частное решение системы с правой частью в виде квазимногочлена. Линейное неоднородное уравнение  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами.

## Основная и дополнительная литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. УРСС, 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
3. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. Москва, МГУ, 1967.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1974.
5. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 2010.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Том 1. М.: МЦНМО, 2012.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Том 2. М.: МЦНМО, 2012.
8. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 2000.
9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по мат.анализу, М.:Наука, 1972г. (и другие издания).
10. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1, 2, 3-е изд. М. Лань 1, 2012.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 15-е изд. Лань М., 2012.
12. Краснов М. Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями. Академия 2012.
13. Маркушевич А.И. Краткий курс аналитических функций. М.: Паука, 1978.
14. Лаврентьев М.А., Шабат В.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
15. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович.И.Г. "Сборник задач по теории функций комплексного переменного". Москва: Наука, 1972.
16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. ФИЗМАТЛИТ, 2004.
17. Треногин В.А. Функциональный анализ. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
18. Федоров В. М. Курс функционального анализа. Лань, 2005.
19. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
20. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2008.
21. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во МГУ, 1984.
22. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1974.

Составитель: Смоленцев Н.К., д.ф.-м.н., профессор кафедры фундаментальной математики